ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย
Mathematical model control the spread of influenza put on mask

อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช[1*], วันชัย ทัพพะปุรณะ[2], เจษฎา สุจริตธุระการ[3]
Anuwat Jirawattanapanit[1*], WanchaiTappapurana[2], Jedsada Sujaritturakan[3]

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย ซึ่งวิเคราะห์ตัวแบบโดยใช้วิธีการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ได้แก่ ศึกษาจุดสมดุล เสถียรภาพของจุดสมดุลและหาคำตอบเชิงตัวเลขวิเคราะห์ ซึ่งได้ศึกษาอัตราการสวมหน้ากากอนามัย (ω) ในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค

จากการเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์พบจุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) เท่ากับ 0.2068 และจุดสมดุลที่มีเชื้อมีค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) เท่ากับ 1.0031 จากการวิจัยพบว่าการสวมหน้ากากอนามัยเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาด

คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, ไข้หวัดใหญ่, การควบคุมการแพร่ระบาดของโรค

Abstract

This research aims to develop and evaluatestability of mathematical modeling for control the spread of influenza use a medical masked. To analyze model by standard method such as the equilibrium point and stability of the equilibrium points. Analytic solutions and numerical solutions are carried out. This research, adding the rate of putting on a medical mask (ω) into mathematical modeling andverify the spread of influenza.

The results obtained from mathematical model of disease free equilibrium have basic reproductive numberR_0 = 0.2068 and and disease endemic equilibrium R_0=1.0031. Results indicated that putting on a medical mask is the factor affecting to the mathematical modeling. If the risk of infection's population put on the medical mask greater than 60% then the spread of influenza decreased until no epidemic.

Keywords: Mathemetical modeling, influenza, control the spread

[1,2,3]อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต
[*]**Corresponding author, E-mail:** anuwut_@hotmail.com

บทนำ

คณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทเกี่ยวข้องในการดำรงชีวิตของมนุษย์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้หลากหลาย โดยเฉพาะทางการแพทย์สามารถประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์เพื่อจำลองการเกิดโรคและการรักษาโรคต่างๆ รวมทั้งเป็นเครื่องมือช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวกับสุขภาพหลายๆด้าน อาทิ สภาพแวดล้อมที่ทำให้เกิดโรคต่างๆ การป้องกันโรค การทดสอบปริมาณยา เป็นต้น ปัจจุบันการเปลี่ยนแปลงของสภาพภูมิอากาศ สิ่งแวดล้อมเป็นสาเหตุให้เกิดโรคที่ติดต่อได้ง่ายมีการแพร่ระบาดอย่างรวดเร็วส่งผลต่อสุขภาพทำให้มนุษย์เสียชีวิตได้ง่าย ดังนั้นจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาช่วยให้มนุษย์มีคุณภาพชีวิตที่ดีขึ้น

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่างๆ โดยจะจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายลักษณะของการระบาดและการดำเนินของโรคโดยที่ผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้อีก ทั้งยังช่วยลดงบประมาณสำหรับการเสริมมาตรการการรักษาและการป้องกันโรคตามความต้องการที่แท้จริงได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมมากที่สุดด้วย(Bureau of Epidemiotogy, 2015)

โรคไข้หวัดใหญ่เป็นโรคที่เกิดจากเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่(Influenza virus) ปัจจุบันเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่มีการเปลี่ยนแปลงทำให้มีการติดต่อมายังมนุษย์หรือสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนมได้และมีความรุนแรงมากขึ้น ทำให้เสียชีวิตได้หากสัมผัสใกล้ชิดกับพาหะของโรค และการติดต่อจากคนที่เป็นโรค ส่วนไข้หวัดใหญ่ในคนมี 2 กลุ่ม คือไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลและไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ สายพันธุ์ไข้หวัดใหญ่ในมนุษย์มีหลายสายพันธุ์ ได้แก่ สายพันธุ์ H1N1 และ H3N2 เป็นการติดเชื้อทางเดินระบบหายใจ เชื้ออาจจะลามเข้าปอดส่งผลให้เกิดปอดบวมผู้ป่วยจะมีไข้สูง ปวดศีรษะ ปวดตามร่างกาย ปวดกล้ามเนื้อ อาการของโรคไข้หวัดใหญ่ ได้แก่ มีไข้ ไอ น้ำมูก เจ็บคอ ปวดเมื่อยตามร่างกาย อาการส่วนใหญ่จะไม่รุนแรงเป็นอยู่ประมาณ 3-5 วัน ซึ่งบางครั้งจะคล้ายโรคไข้หวัดธรรมดา ในผู้ป่วยที่มีอาการรุนแรงอาจเกิดการอักเสบของปอด ทำให้ปอดบวมการหายใจล้มเหลว ซึ่งจะรุนแรงจนถึงขั้นเสียชีวิตได้ การติดต่อของไข้หวัดใหญ่เกิดจากการสัมผัสละอองฝอยจากการไอหรือจามของผู้ป่วยโดยละอองฝอยที่มีเชื้อเหล่านี้เมื่อสัมผัสกับทางเดินหายใจหรือตามเยื่อบุต่างๆเช่น เยื่อบุตา จะทำให้เชื้อเข้าสู่ร่างกายและเป็นโรคได้ ดังนั้นผู้ป่วยและผู้ใกล้ชิดจึงควรสวมหน้ากากอนามัยเพื่อลดการแพร่กระจายของละอองฝอย รวมทั้งควรล้างมือบ่อยๆและหลีกเลี่ยงการใช้มือสัมผัสหน้า ตา จมูก เป็นต้น (สำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรคกระทรวงสาธารณสุข, 2559)

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่ทำให้ทราบถึงการแพร่ระบาดและผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบช่วยให้ผู้วิจัยเข้าใจถึงปัจจัยที่สามารถควบคุมการแพร่ระบาดของโรคได้ รวมทั้งมีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับการติดต่อของโรค จุดเด่นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์คือสามารถปรับเปลี่ยนลักษณะเฉพาะของโรคระบาดได้ ซึ่งในขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูล ตัวแบบจะช่วยให้เข้าใจวิวัฒนาการของการระบาดและเข้าใจถึงมาตรการควบคุมโรค ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ของการศึกษานี้จะเป็นประโยชน์อย่างสูงในการลดความเสี่ยงของการติดเชื้อไข้หวัดใหญ่ และการควบคุมไข้หวัดใหญ่ โดยการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในครั้งนี้ผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จากงานวิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของไข้หวัดใหญ่โดยพิจารณาผลกระทบจากปริมาณน้ำฝน (ณัฐกร จันทร์ชัยและคณะ, 2558) โดยการเพิ่มตัวแปรอัตราการสวมหน้ากากอนามัย

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงทำการวิจัยเรื่อง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัยซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มตัวแปรอัตราการสวมหน้ากากอนามัยเป็นปัจจัยสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและควบคุมโรคไข้หวัดใหญ่ที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย

2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย

แนวคิด ทฤษฎี กรอบแนวคิด

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย เป็นการแปลงปัญหาที่เกิดขึ้นจริงให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อง่ายต่อการวิเคราะห์ วิจัย เพื่อทำนายหรือพยากรณ์การแพร่ระบาดของโรค และใช้ในการตัดสินใจสำหรับการควบคุมและป้องกันโรค การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยต้องอาศัยผู้เชี่ยวชาญจากหลากหลายสาขา อาทิ ไวรัสวิทยา โรคติดเชื้อ ระบาดวิทยาและคอมพิวเตอร์ เพื่อรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับโรคไข้หวัดใหญ่ ก่อนแปรเปลี่ยนเป็นตัวแบบที่อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์โดยผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์พื้นฐาน SIR Model (Susceptible- Infectious - Recovered) ซึ่งแบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่มคือกลุ่ม Susceptible เป็นกลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อกลุ่ม Infectious เป็นกลุ่มที่ติดเชื้อ กลุ่ม Recovered เป็นกลุ่มที่มีภูมิคุ้มกันหรือกลุ่มที่ติดเชื้อแล้วหาย ผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของ ณัฐกร จันทร์ชัยและคณะ, (2558) ศึกษาวิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของไข้หวัดใหญ่ โดยพิจารณาผลกระทบจากปริมาณน้ำฝน ซึ่งประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

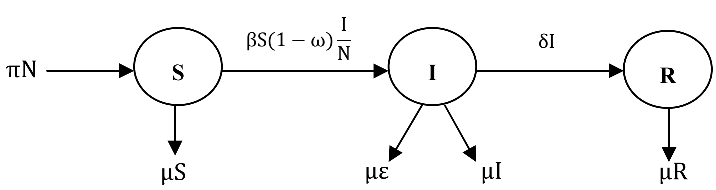
$$\frac{dS}{dt} = \mu N - g(T)\beta SI - \mu S$$
$$\frac{dI}{dt} = g(T)\beta SI - (\gamma + \mu)I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

จากสมการข้างต้นผู้วิจัยได้ศึกษาและค้นคว้าพบว่าการติดต่อของไข้หวัดใหญ่เกิดจากการสัมผัสละอองฝอยจากการไอหรือจามของผู้ป่วยโดยละอองฝอยที่มีเชื้อเหล่านี้เมื่อสัมผัสกับทางเดินหายใจหรือตามเยื่อบุต่างๆ จะทำให้เชื้อเข้าสู่ร่างกายและเป็นโรคได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยการเพิ่มค่าพารามิเตอร์(ω) คือ อัตราการสวมหน้ากากอนามัย เป็นปัจจัยสำหรับการศึกษา เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและควบคุมโรคไข้หวัดใหญ่ที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น

วิธีดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยจะศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ โดยผู้วิจัยดำเนินการตาม 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ศึกษาแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบ ดังนี้



ภาพ 1 แผนภาพความสัมพันธ์และองค์ประกอบของการควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่

เมื่อ S เป็นจำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ t เวลาใดๆ, I เป็นจำนวนคนที่ติดเชื้อ ณ t เวลาใดๆ, R เป็นจำนวนคนที่หายป่วยจากโรค ณ t เวลาใดๆ, π เป็นอัตราการเกิดใหม่ของประชากรมนุษย์, β เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อ, μ เป็นอัตราการตายโดยธรรมชาติ, ε เป็นอัตราการตายโดยโรค, δ เป็นอัตราการมีภูมิคุ้มกัน, ω เป็น

อัตราการสวมหน้ากากอนามัย และ N เป็นจำนวนประชากรของมนุษย์ทั้งหมด ซึ่งการศึกษาในครั้งนี้ได้กำหนดให้จำนวนประชากรคงที่

2. ตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบโดยผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้องกับศาสตร์นี้โดยตรง ได้แก่ นักระบาดวิทยาและนักคณิตศาสตร์

3. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน (standart method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุลนั้น โดยวิธีเชิงวิเคราะห์และหาคำตอบเชิงตัวเลขของตัวแบบ

3.1 การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานเป็นการศึกษาหาค่าจุดสมดุลและค่าเสถียรภาพของระบบ ดังนี้

3.1.1 จุดสมดุล (Equilibrium point)เป็นการหาจุดสมดุลโดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ของตัวแบบให้เท่ากับศูนย์ ได้ดังนี้ $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ ซึ่งจะได้ค่าจุดสมดุลไม่มีโรค (Disease free state :E_0) ในกรณีที่ไม่มีการติดเชื้อ และค่าจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของโรค (Endemic disease state :E_1) ในกรณีที่มีการระบาดของเชื้อ

3.1.2 เสถียรภาพ (stability) โดยการหาค่าลักษณะเฉพาะเพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุลสำหรับตรวจสอบว่าเป็น Local asymptotically stable ซึ่งทำได้ 2 กรณี ดังนี้

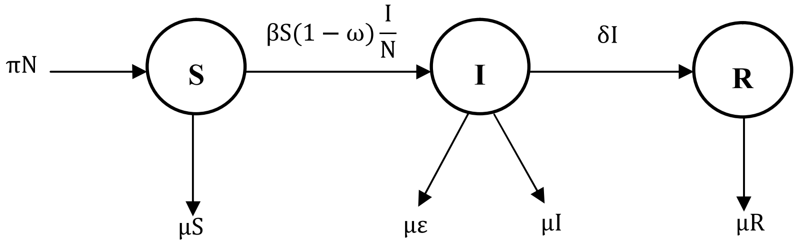
1) Local asymptotically stable ของจุดสมดุลไม่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค (E_0) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะโดยทุกค่าต้องเป็นลบ จึงจะสอดคล้องตามเงื่อนไข $R_0 < 1$

2) Local asymptotically stable ของจุดสมดุลที่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่ระบาดของโรค (E_1) จะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J - \lambda I) = 0$ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ของสมการลักษณะเฉพาะเป็นลบ สำหรับค่าที่ได้ตามเกณฑ์ $R_0 > 1$

3.2 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข จะพิจารณาหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium) และจุดสมดุลที่เกิดจากการแพร่ระบาดของโรค (Disease Endemic Equilibrium) ทำให้ระบบเป็น Local asymptotically stable ซึ่งเป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์และค่าลักษณะเฉพาะทุกค่าต้องมีส่วนจริงเป็นลบซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อนำค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม Matlab

การสร้างตัวแบบและการวิเคราะห์ตัวแบบ

จากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัยสามารถสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้ดังนี้



ภาพ 2 แผนภาพความสัมพันธ์และองค์ประกอบของการควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่

จากภาพ 2 ผู้วิจัยได้ดำเนินการส่งให้ผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้องได้แก่ ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์และบุคลากรทางการแพทย์ ช่วยตรวจสอบแผนภาพและสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น เมื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบและ

ให้ข้อเสนอแนะ ผู้วิจัยได้ทำการแก้ไข ปรับปรุงตามคำแนะนำแล้วนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้มาวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ซึ่งจากภาพ 2 ได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \pi N - \mu S - (1-\omega)\beta S\frac{I}{N} \qquad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = (1-\omega)\beta S\frac{I}{N} - (\mu+\varepsilon+\delta)I \qquad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I - \mu R \qquad (3)$$

โดยที่ $N = S + I + R$

จากสมการ (1), (2) และ(3) ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ได้ผลสรุปดังนี้

1. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ตามวิธีมาตรฐาน

$$\frac{dS}{dt} = F(x), F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, x = (S, I, R)^t$$

$$F(x) = \left[\pi N - \mu S - (1-\omega)\beta S\frac{I}{N} + (1-\omega)\beta S\frac{I}{N} - (\mu+\varepsilon+\delta)I + \delta I - \mu R\right]$$

ดังนั้น $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$จะได้ $\frac{dN}{dt} = (\pi-\mu)N - \varepsilon I$

ดังนั้นN_tคงที่เมื่อ $\pi = \mu$

2. จุดสมดุล (Equitibriumpoints)

กำหนดให้ $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$, $\frac{dR}{dt} = 0$ จากสมการ (1), (2)และ (3) จะได้

$S^* = \frac{\pi N}{(1-\omega)\beta\frac{I}{N}+\mu}$ (4), $I^* = \frac{(1-\omega)\beta S\frac{I}{N}}{(\mu+\varepsilon+\delta)}$(5), $R^* = \frac{\delta I}{\mu}$(6)

2.1 จุดสมดุลไม่มีเชื้อ (Disease Free Equilibrium Point)

กำหนดให้ $I = 0$ ในสมการที่ (4) จะได้ $S = N$, แทน $I = 0$ ในสมการ (6) จะได้ $R = 0$ ดังนั้น $E(S, I, R) = E_0(N, 0, 0)$ความเสถียรของระบบ (Stabili of systems) ที่จุด E_0 ได้ดังนี้

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu & \beta(1-\omega) & 0 \\ 0 & \beta(1-\omega)-(\varepsilon+\mu+\delta) & 0 \\ 0 & \delta & -\mu \end{bmatrix}$$

ดำเนินการหาสมการลักษณะเฉพาะ $\det(J_0 - \lambda I) = 0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen values)และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3 x 3 ดังนี้

$$\det(J_0 - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\mu-\lambda & \beta(1-\omega) & 0 \\ 0 & \beta(1-\omega)-(\varepsilon+\mu+\delta)-\lambda & 0 \\ 0 & \delta & -\mu-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J_0 - \lambda I) = (-\mu-\lambda)(\beta(1-\omega)-\varepsilon-\mu-\delta-\lambda)(-\mu-\lambda)$$

โดย$\det(J_0 - \lambda I) = 0$จะได้ $\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = \beta(1-\omega)-\varepsilon-\mu-\delta, \lambda_3 = -\mu$

2.2 จุดสมดุลที่มีเชื้อ(Disease Endemic Equilibrium Point)

กำหนดE_1 (S^*, I^*, R^*)พิจารณา$I \neq 0$, $I > 0$จะได้$S^* = \frac{\pi N}{(1-\omega)\beta\frac{I}{N}+\mu}$, $I^* = \frac{(1-\omega)\beta S\frac{1}{N}}{\mu+\varepsilon+\delta}$, $R^* = \frac{\delta I}{N}$ ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะที่จุด$E_1 = (S^*, I^*, R^*)$โดยให้$\det(J_1 - \lambda I) = 0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen values)และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3 x 3ดังนี้

$$J_1 = \begin{bmatrix} \left(\beta(1-\omega)\frac{I}{N}-\mu\right) & \frac{\beta S(1-\omega)}{N} & 0 \\ \beta(1-\omega)\frac{I}{N} & \frac{\beta S(1-\omega)}{N}-(\varepsilon-\mu-\delta) & 0 \\ 0 & \delta & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\det(J_1 - \lambda I) = \begin{bmatrix} \left(\beta(1-\omega)\frac{I}{N}-\mu\right)-\lambda & \frac{\beta S(1-\omega)}{N} & 0 \\ \beta(1-\omega)\frac{I}{N} & \frac{\beta S(1-\omega)}{N}-(\varepsilon-\mu-\sigma)-\lambda & 0 \\ 0 & \delta & -\mu-\lambda \end{bmatrix}$$

ดังนั้น λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen values) โดยสามารถหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะ ดังนี้
$(\lambda+\mu)(\lambda^2+a\lambda+b)=0$โดยที่ a>0 และb>0

3. การหาค่าระดับการติดเชื้อ

จากสมการ (1) , (2) , (3) สามารถจัดให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ $\frac{dx}{dt} = F(x)-V(x)$
เมื่อ F คือ เมทริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น, V คือ เมทริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง

$$F(x)=\begin{bmatrix}0\\(1-\omega)\beta S\frac{I}{N}\\0\end{bmatrix}\ ,\ V(x)=\begin{bmatrix}-\pi N+(1-\omega)\beta S\frac{I}{N}+\mu S\\(\mu+\epsilon+\delta)I\\-\delta I+\mu R\end{bmatrix}$$

คำนวณหาค่า Spectral radiusของ FV^{-1}เขียนแทนด้วย $P(FV^{-1})$จะได้ดังนี้

$$P(FV^{-1}) = \frac{(1-\omega)\frac{\beta S}{N}}{(\mu+\varepsilon+\delta)} = R_0$$

ดังนั้น จุดสมดุลภายใต้สภาวะการระบาดมีความเสถียรภาพเมื่อ $R_0>1$ โดย $R_0=\frac{(1-\omega)\frac{\beta S}{N}}{(\mu+\varepsilon+\delta)}$
โดยพิจารณา ดังนี้

1. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.2068 แสดงว่าเมื่อ $R_0<1$ จะไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่
2. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่มีเชื้อมีค่าเท่ากับ 1.0031 แสดงว่าเมื่อ $R_0>1$ จะเกิดการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่

4. ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

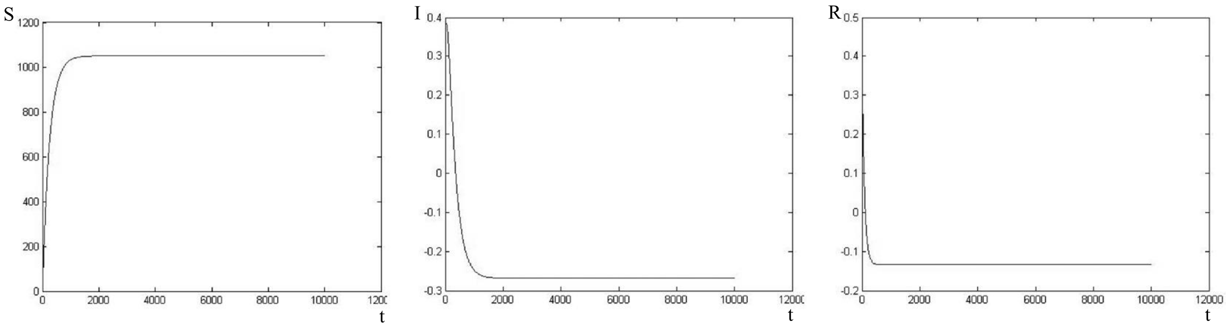
การวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ ซึ่งมีค่าตามตารางดังนี้

ตาราง 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
จำนวนประชากรของมนุษย์ทั้งหมด	N	10,000	คน
อัตราการเกิดใหม่ของประชากรมนุษย์*	π	1174.17	ต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ*	β	0.002	ต่อวัน
อัตราการตายโดยธรรมชาติ*	μ	3.9139×10^{-5}	ต่อวัน
อัตราการตายโดยโรค*	ε	0.0063	ต่อวัน
อัตราการมีภูมิคุ้มกัน*	δ	0.2	ต่อวัน
อัตราการสวมหน้ากาก**	ω	0.6	

*สำนักระบาดวิทยากรมควบคุมโรคกระทรวงสาธารณสุข, (2559)
**ค่าที่น้อยสุดที่ผู้วิจัยเลือกและทดสอบในตัวแบบ

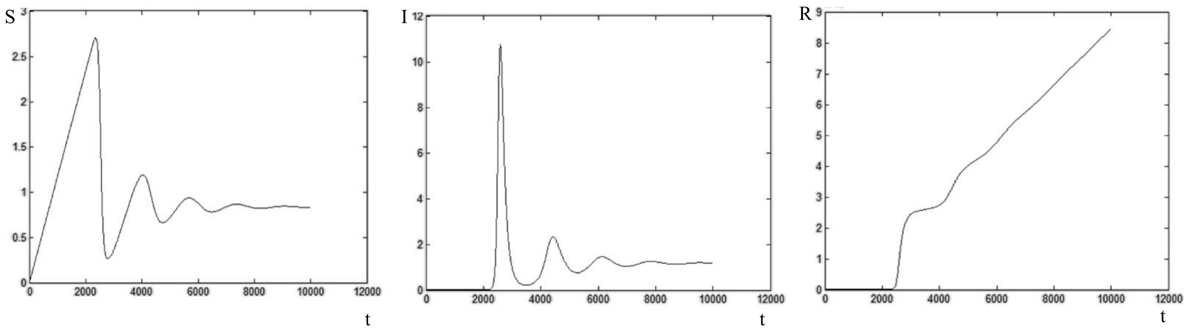
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Huewitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่จุด E_0=(10000, 0, 0) ดังนั้น จุดสมดุลไม่มีเชื้อ E_0=(10000, 0, 0) จะเป็น Local asymptotically ดังภาพ 3



(a) (b) (c)

ภาพ 3 สัดส่วนของประชากร (a)ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ t เวลาใดๆ (S), (b)ประชากรที่ติดเชื้อ ณ t เวลาใดๆ (I) และ(c)ประชากรที่หายป่วยจากโรค ณ t เวลาใดๆ(R)ณเสถียรภาพของจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรคเมื่อ ค่า $R_0<1$

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีเชื้อโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Huewitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่จุด $E_1=(S^*, I^*, R^*)$ ดังนั้น จุดสมดุลไม่มีเชื้อ $E_1=(S^*, I^*, R^*)$ จะเป็น Local asymptotically ดังภาพ 4



(a) (b) (c)

ภาพ 4 สัดส่วนของประชากร (a)ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ t เวลาใดๆ (S), (b)ประชากรที่ติดเชื้อ ณ t เวลาใดๆ (I) และ(c)ประชากรที่หายป่วยจากโรค ณ t เวลาใดๆ (R)ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีเชื้อโรคเมื่อ ค่า $R_0>1$

จากการวิจัยพบว่า การสวมหน้ากากอนามัยเป็นผลปัจจัยหนึ่งต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่ โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อไข้หวัดใหญ่มีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันน้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อไข้หวัดใหญ่มีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อไข้หวัดใหญ่และประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อไข้หวัดใหญ่มีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันเป็นจำนวนไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 ของประชากรทั้งหมด จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อ

อภิปรายผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย และวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อ และประชากรที่หายป่วยจากโรค ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มค่าพารามิเตอร์ ω คือ อัตราการสวมหน้ากากอนามัย ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้วใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน และวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรคโดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local asymptotical stable ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ R_0 ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไขเพื่อให้ Local asymptotically stability of equilibrium state ที่มีความเสถียรในส่วนของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่าจุดสมดุลทั้งสองเป็น Local asymptotical stable ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคพบว่าค่าระดับการติดเชื้อ $R_0=0.2068$ และจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคพบว่าค่าระดับการติดเชื้อ $R_0=1.0031$

จากการวิจัยพบว่า การสวมหน้ากากอนามัยเป็นผลปัจจัยหนึ่งต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่ โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันน้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อ ดังนั้นหน่วยงานด้านสาธารณสุขควรแจกหน้ากากอนามัยให้กับผู้ป่วยไข้หวัดใหญ่ และประชาชนทั่วไปที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเป็นจำนวนไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 ของประชากรทั้งหมด

ข้อเสนอแนะและการนำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโรคชนิดอื่นที่มีลักษณะการแพร่กระจายทางอากาศและแพร่ระบาดคล้ายกับโรคไข้หวัดใหญ่ได้
2. ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการเพิ่มค่าพารามิเตอร์อื่นๆ ได้แก่ การรณรงค์ให้ความรู้เกี่ยวกับไข้หวัดใหญ่ การฉีดวัคซีนป้องกันโรค เป็นต้น

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ ผศ.ดร.สุรพล เนาวรัตน์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี และ ดร.บัณฑิตย์ อันยงค์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต ที่เป็นแรงบันดาลใจและเป็นผู้เชี่ยวชาญให้คำแนะนำในการทำวิจัยครั้งนี้

ขอขอบคุณคณาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ตที่ให้การสนับสนุน คำปรึกษา วัสดุและอุปกรณ์ และสถานที่ในการดำเนินการวิจัย

ขอบคุณนายมุสลีมิน อีแต และนางสาวศิริมา อิสลาม นักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ตที่เป็นผู้ช่วยผู้วิจัยจนงานวิจัยสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

ณัฐกร จันทร์ชัยและคณะ. (2558). **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่โดยพิจารณาผลกระทบจากปริมาณน้ำฝน**. สกลนคร: มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร.

สานักระบาดวิทยากรมควบคุมโรคกระทรวงสาธารณสุข. (2559). **โรคไข้หวัดใหญ่ (Influenza)** (Online). สืบค้นจากhttp://www.boe.moph.go.th/boedb/surdata/disease.php?ds=15, 15 มกราคม 2558.

Jantapron Sukawat and Surapol Naowarat. (2014). **Effect of Rainfall on the transmission Model of Conjunctivitis**. Advancen in Environmental Biology, 8-14.

Bureau of Epidemiotogy. (2015). **Lnfluenza**(Online).http://rnnvw.boe.moph.go.th/facVlnfluenza, 30 August 2015.

Naowarat, S., Tawarat, W., & Tang, I.M., (2011). **Control of the Transmission of Chikungunya Fever Epidemic Through the use of Adulticid**. Science Publication, 6: 558-565.